**专题07 经典超越不等式**

**一、结论**

**(1)对数形式:,当且仅当时,等号成立.**

**(2)指数形式:,当且仅当时,等号成立.**

**进一步可得到一组不等式链：（且）**

**上述两个经典不等式的原型是来自于泰勒级数：**

**；**

**；**

**截取片段：**

****

**，当且仅当时,等号成立；**

**进而：当且仅当时,等号成立**

**二、典型例题**

1．（2022·江苏苏州·高三期末）已知 则下列不等式一定成立的是（ ）

A． B．

C． D．

【答案】C

【解析】

取，则，故A选项错误；

取，，，则B选项错误；

取，，则，，即，

故D选项错误；

关于C选项，先证明一个不等式：，令，，

于是时，递增；时，递减；

所以时，有极小值，也是最小值，

于是，当且仅当取得等号，

由，当时，同时取对数可得，，

再用替换，得到，当且仅当取得等号，

由于，得到，，，即，

C选项正确.

故选：C.

**【反思】对于指数形式:,当且仅当时,等号成立，该不等式是可以变形使用的：**

****

**注意使用时的取值范围；**

**同样的还可以如下处理：两边同时取对数：**，同样可以变形使用：

；



**注意使用时的取值范围.**

2．（2021·安徽·高三阶段练习（文））已知函数.

(1)若对，都有，求实数*a*的取值范围；

(2)若*a*、，且，求证：对任意，都有：.

【答案】(1)(2)证明见解析

【解析】

(1)由时：

又：,

①若时，由，故，

所以对任意，都有：

此时函数在上单调递增，故对任意，都有：满足条件.

②若时，由，故：

故可得：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x* |  |  |  |
|  | - | 0 | + |
|  |  | 极小值 |  |

故函数在上单调递减，在上单调递增,

故：不满足条件，都有,

综上，实数*a*的取值范围为.

(2)由（1）可知，当时，对任意，都有：,

故对任意，都有：,

又*a*、，故对任意，都有：，

又，故：

故对任意，都有：.

**【反思】注意在解答题中不能直接使用，需要证明后才可以使用，才可以进一步变形得到有利于解题的不等式.**

**三、针对训练 举一反三**

**一、单选题**

1．（2022·广东韶关·一模）已知，则（ ）

A． B．

C． D．

【答案】C

【详解】

解：当，又，所以，故

记，所以，

令，得，令，得，

所以在单调递减，在单调递增.

所以，即，当时取等号.

所以，

所以.

故选：C.

2．（2022·山西运城·（理））已知命题：，；命题：，则下列命题中为真命题的是（ ）

A． B． C． D．

【答案】A

【详解】

令且定义域为，则，

所以上，递增；上，递减；

所以，即，又，恒成立，

所以命题*p*为假命题，命题*q*为真命题，则为真命题，为假命题，

故为真，、、为假.

故选：A.

3．（2021·广东肇庆·）下列不等式中，不恒成立的是（ ）

A． B．

C． D．

【答案】D

【详解】

对于A：令，

，

所以当时，，单调递增，

当时，，单调递减，

所以，

所以，

所以，故A正确；

对于B：令，

，

所以在上，，单调递减，

在，上，，单调递增，

所以，

所以，

所以，，故B正确；

对于C：令，

，

当时，，单调递减，

当时，，单调递增，

所以（1），

所以，

所以，

所以，故C正确；

对于D：取，得，故D错误，

故选：D

4．（2021·安徽·东至县第二中学（理））下列不等式正确的个数有（ ）个.

①；②；③

A．0 B．1 C．2 D．3

【答案】D

【详解】

对于①，令，，则在上递减，在上递增，，

，即，①正确；

由知，恒成立，则有，即成立，②正确；

对于③，令，，即在上单调递减，

而，则，

所以有，③正确.

故选：D

5．（2020·黑龙江哈尔滨·（理））下列四个命题中的假命题为（ ）

A．， B．，

C．， D．，

【答案】C

【详解】

构造函数，，所以在区间上，递减，在区间上，递增，所以在处取得极小值也即是最小值，所以，即在上恒成立，将改为，则有在上恒成立.所以AB选项为真命题.

当时，，，此时，所以D选项为真命题.

构造函数（），，所以在区间上，递增，在区间上，递减，所以在处取得极大值也即是最大值，所以，即在上恒成立.所以C选项为假命题.

故选：C

6．（2019·湖北·（文））下列不等式中正确的是

①；②；③.

A．①③ B．①②③ C．② D．①②

【答案】B

【详解】

对于①：令，则恒成立，

则是减函数，所以有恒成立，

所以成立，所以①正确；

对于②：，令，，

当时，，当时，，

所以函数在上是减函数，在上是增函数，

所以在处取得最小值，所以，

所以成立，所以②正确；

对于③，，，令，有，

所以有当时，，当时，，

所以函数在时取得最大值，即，

所以，恒成立，所以③正确；

所以正确命题的序号是①②③，

故选B.

7．（2020·全国·（理））已知命题：，，命题：，，则下列命题正确的是

A． B． C． D．

【答案】C

【详解】

解：令 ，时， ，所以f(x)在 单调递增， ，p真；

令 ， ，

 ，所以 在 恒成立，q假；故选C.

8．（2021·安徽·毛坦厂中学高三阶段练习（理））设，，，（其中自然对数的底数）则（ ）

A． B． C． D．

【答案】D

【详解】

构造函数，，，所以在上递增，在上递减，所以，即.

令，则，，，考虑到，可得，即，化简得等号当且仅当时取到，故时，排除*A*，*B*.下面比较*a*，*b*大小，由得，，故.所以.

故选:D

9．（2022·全国·高三专题练习）若正实数，满足，则（ ）

A． B．

C． D．

【答案】B

【详解】

先证明熟知的结论：恒成立，且当且仅当时取等号.

设,则,

在(0,1)上，,单调递减;在(1,+∞)上，,单调递增.

故,

∴恒成立，且当且仅当时取等号.

由,

由已知，

∴，且，

解得,

经检验只有B正确，

故选：B.

**二、填空题**

10．（2020·广东·高三阶段练习）已知函数的反函数为，若实数*m*、*n*满足，则 \_\_\_\_．

【答案】1

【详解】

依题意，，

设，则，易知时，递减，时，，递增．所以，即，所以，

令，则，于是有，即，所以．

由不等式，，得，，

又，故，，故，，即．

故答案为：1．

11．（2020·北京·中关村中学）已知函数，，其中，e为自然对数的底数，若，使，则实数*a*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【详解】

令，

则，当时，

所以在单调递增，所以

所以

由，所以当时，

故若，使

转化为，

则，即

令，

若时，，若时，

所以函数在递增，在递减

所以

所以，即

故答案为：

**三、解答题**

12．（2022·浙江·高三专题练习）证明以下不等式：

(1)；

(2)；

(3).

【答案】(1)证明见解析；(2)证明见解析；(3)证明见解析.

(1)

解：令，则有.

令，即，解得；

令，即，解得，

所以在单调递减，上单调递增，

所以，即.

所以.

(2)

解：令，则.

令，即，解得；

令，即，解得，

所以在单调递增，上单调递减，

所以，即，

所以.

(3)

解：由（1）得，所以（当且仅当时取等号）①.

由（2）得，所以（当且仅当时取等号）②

因为①式与②式取等号的条件不同，所以.

13．（2022·全国·高三专题练习）已知.

(1)求函数的单调区间；

(2)设函数，若关于的方程有解，求实数的最小值；

(3)证明不等式：.

【答案】(1)单调增区间为，单调减区间为.(2)0.(3)证明见解析.

(1)

解：，， 由得，

当时，.

函数的单调增区间为，单调减区间为.

(2)

解：函数， ，

，令，得.

时，，时，，

在递减，在递增，，

关于的方程有解，则实数的最小值为0.

(3)

证明：由（2）得在上恒成立，

令，则有 ，

，，，， ，

 ，

.